

地理空間情報の平面位置正確度の評価

Estimation of the Horizontal Positional Accuracy of Geospatial Data

測地部 小清水寛・村上真幸
Geodetic Department Hiroshi KOSHIMIZU and Masaki MURAKAMI

要 旨

測位情報精度の更なる向上への期待を背景として、測位情報を用いたサービスの更なる高度化へ向けた取り組みが活発になっている。例えば ITS（高度道路交通システム）サービス分野では、誰もが共通に利用できる高精度地図（オーソリティマップ）を利用した各種運転支援サービスが検討されている（ITS Japan, 2013）。今後、測位情報とペアとなるべき地図の平面位置正確度に関する情報開示が、今まで以上の詳細さで求められると予想される。

地図を描画するための幾何情報が収録されている地理空間情報の位置正確度については、公共測量の作業規程の準則（国土交通省, 2013）において標準偏差と呼ばれる指標の制限値が設定されている。縮尺が 1/2500 に相当する地図表現精度を有する数値地形図データに対する平面位置の標準偏差は、新規測量の場合には 1.75m 以内、修正測量の場合には 2.50m 以内と規定されている。

しかしながら、この規定値をそのまま地理空間情報の位置正確度とするには問題がある。まず、標準偏差と呼ばれる指標の従う確率分布が明示されていない。さらに、上記制限値は公共測量の実態や他国の制限値と比べて大きすぎるのではないかという問題提起がなされている（村上ほか, 2010）。

そこで、米国連邦地理データ委員会（FGDC）の位置正確度策定基準（FGDC, 1998）に影響を与えた Greenwalt-Shultz (1968) による二次元正規分布の考察結果を用いて、指標の明示的な定義を与える。さらに、縮尺 1/2500 相当の数値地形図データのサンプル集合を対象として、指標の実勢値（平均値や実質的な制限値）を大まかに見積もる調査を実施する。

1. 指標の明示的な定義

1.1 全体の流れ

地理空間情報のサンプルをひとつ指定して、検証点残差の成分値を実現値にもつような確率変数を設定し、それら確率変数の間に相関がない場合の正確度指標を Greenwalt-Shultz (1968) の手法に従って導入する。導入された正確度指標は Circular Standard Error（以下、「CSE」と略する.）と呼ばれる。本調査では、正確度指標 CSE の定義を、確率変数の間に相関がある場合にまで拡張し、検証点数に応じた指標の推定値の誤差を把握する。最後に、実際に地理空間情報の検証点残差を計算する上での障害となるバイアスの処理方法に関する指針を与える。

1.2 議論の出発点

地理空間情報のサンプルから n 個の検証点 $p_1, \dots, p_n$ をランダムに抽出し、各検証点 p_i における水平座標成果値を (sx_i, sy_i) とおく。更に、地理空間情報の作成（写真測量）とは独立でより正確度の高い測定方法（GNSS 測量機を用いた現地測量）によって得られた各検証点 p_i の水平座標値を (ex_i, ey_i) とする。検証点 p_i における水平座標値の残差を $x_i = sx_i - ex_i$, $y_i = sy_i - ey_i$ で定める。また残差の平均値 $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ を以後バイアスと呼び、 $\langle x \rangle = 0$, $\langle y \rangle = 0$ が成立するとき、残差にはバイアスが含まれないということにする。地理情報標準（国土地理院, 2007）によれば、「位置正確度—絶対正確度（外部正確度）」は「測定された座標値と真又は真とみなす座標値との近さ」と定義される。本調査では、「測定された座標」を (sx_i, sy_i) に、「真又は真とみなす座標値」を (ex_i, ey_i) に対応付け、この条件のもとで「位置正確度—絶対正確度（外部正確度）」を残差 (x_i, y_i) に対応付ける。残差 x_i, y_i を実現値にもつ確率変数を各々 X, Y とする。 X は母平均 $m_X = 0$, 母分散 σ_X^2 を有する正規分布 f_X に従い、 Y は母平均 $m_Y = 0$, 母分散 σ_Y^2 を有する正規分布 f_Y に従うものとする：

$$X \sim f_X(x; m_X = 0, \sigma_X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right\}, \quad Y \sim f_Y(y; m_Y = 0, \sigma_Y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right\} \quad \cdots \quad (1.2.1)$$

更に f_X, f_Y を周辺分布に有する二次元分布を f_{XY} , X と Y の相関係数 $\sigma_{XY} / \sigma_X \sigma_Y$ を ρ と記す。

1.3 正確度指標 (CSE) の導入

本節では確率変数 X と Y の間に相関がない ($\rho=0$) ことを仮定し, Greenwalt-Shultz (1968) による CSE (Circular Standard Error, 再掲) の概念を導入する. 相関がない場合の二次元分布は $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ であり, これを極座標表示する:

$$f_{XY}(x, y)dx dy = g(r, \theta)dr d\theta$$

$$\therefore g(r, \theta) = rf_{XY}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2 \theta}{\sigma_X^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\sigma_Y^2}\right)\right\}$$

極座標表示 $g(r, \theta)$ を用いて任意に取得した検証点が原点 $(0, 0)$ を中心とした半径 R の閉円板内に収まる確率 $P(R)$ を構成することができる:

$$P(R) = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} g(r, \theta) dr d\theta = \frac{2a}{1+a^2} \int_0^x e^{-v} \cdot I_0(kv) dv \quad \cdots (1.3.1).$$

$$\left(a = \sigma_X / \sigma_Y, \quad x = \frac{R^2}{4\sigma_Y^2} \left(\frac{1+a^2}{a^2} \right), \quad v = \frac{r^2}{4\sigma_Y^2} \left(\frac{1+a^2}{a^2} \right), \quad k = \frac{1-a^2}{1+a^2}, \quad I_0(\cdot): 0 \text{ 次の第一種変形ベッセル関数} \right)$$

上式において二番目の等号の証明は命題 5.1 において与えられる. X と Y の分散が等しい ($\sigma_X = \sigma_Y$) 場合には, この等しい値を σ_C として,

$$g(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma_C^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_C^2}\right), \quad P(R) = 1 - \exp(-R^2/2\sigma_C^2) \quad \cdots (1.3.2)$$

である.

X と Y の分散が等しい ($\sigma_C = \sigma_X = \sigma_Y$) 場合に $P(\sigma_C) \doteq 0.3935$ となることを利用して, 分散が等しくない ($\sigma_X \neq \sigma_Y$) 場合にも, $P(\sigma_C) = 0.3935$ を満たす σ_C を二次元正規分布 f_{XY} の標準偏差と定義し, CSE と名付けることにする. 確率変数の従う正規分布に関する仮定 ($m_X = 0, m_Y = 0$) は, 確率変数の実現値としての検証点残差にバイアスがないことを意味しているので, σ_C の推定値は平面位置の正確度に関する指標と考えることができる.

σ_C を (分散が等しいとは限らない場合にも) 具体的に与えるには, σ_C と σ_X, σ_Y の関係を数学的に記述する必要がある. Greenwalt-Shultz (1968) はこの記述を数値解析的な手法を用いて与えている. $\sigma_Y \geq \sigma_X$ (換言すると $a \leq 1$) と仮定して, 命題 5.2 を $P(R) = F(R/\sigma_Y, a)$ に対して適用すると, $P(R) = 0.3935 \Rightarrow R/\sigma_Y \doteq 0.5 + 0.5a$, すなわち,

$$\sigma_C = (\sigma_X + \sigma_Y) / 2 \quad \cdots (1.3.3)$$

が得られる. 上式は σ_X と σ_Y に関する対称式であるから, X と Y の役割を入れ替えて σ_C の関係式を求めても結果は同じである. つまり, σ_C の表現式 (1.3.3) は任意の (σ_X, σ_Y) に対して成立する式である.

以上により, σ_X の不偏推定値 $u_X = \{\sum x_i^2 / (n-1)\}^{1/2}$, σ_Y の不偏推定値 $u_Y = \{\sum y_i^2 / (n-1)\}^{1/2}$ から, σ_C の推定値 u を以下に定める:

$$u = (u_X + u_Y) / 2 \quad \cdots (1.3.4).$$

1.4 相関がある場合への CSE の拡張

本節では, 確率変数 X と Y の間に相関がある ($\rho \neq 0$) ことを仮定して, 前節 1.3 で導入した CSE の概念を拡張する. 相関がある場合の二次元分布 f_{XY} は,

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\}, \quad M = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1/\sigma_X^2 & -\rho/\sigma_X\sigma_Y \\ -\rho/\sigma_X\sigma_Y & 1/\sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

と表現される. 第 1.3 節と同様な枠組みのもとで正確度指標を定義するために, 座標変換:

$$(x, y) \mapsto (x', y') \mapsto (r, \theta) \quad (x' = r \cos \theta, \quad y' = r \sin \theta)$$

を考える. 第一の矢印 (変換) は,

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

に対して、命題 5.3 によって定められる直交変換である。この変換により、二次元分布 f_{XY} は以下のように極座標表示される：

$$f_{XY}(x, y) dx dy = g(r, \theta) dr d\theta$$

$$\therefore g(r, \theta) = r f_{XY}(r \cos(\theta + \omega), r \sin(\theta + \omega)) = \frac{r}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}(\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta)\right\}$$

変換 $(x, y) \rightarrow (x', y')$ が直交的であることは $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = r^2$ を意味する。従って、任意に取得した検証点が原点 $(0, 0)$ を中心とした半径 R の閉円板内に収まる確率 $P(R)$ は、やはり第 1.3 節と同様に、

$$P(R) = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} g(r, \theta) dr d\theta$$

で表現される。第 1.3 節の場合との対応関係：

$$\sigma_X \leftrightarrow \sqrt{1/\alpha}, \quad \sigma_Y \leftrightarrow \sqrt{1/\beta}, \quad \sigma_X/\sigma_Y \leftrightarrow a \equiv \sqrt{\beta/\alpha}$$

に留意しつつ命題 5.1 を適用することにより、

$$P(R) = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} g(r, \theta) dr d\theta = \frac{2a}{1+a^2} \int_0^x e^{-v} \cdot I_0(kv) dv$$

$$(a = \sqrt{\beta/\alpha}, \quad x = \frac{\beta R^2}{4} \left(\frac{1+a^2}{a^2} \right), \quad v = \frac{\beta r^2}{4} \left(\frac{1+a^2}{a^2} \right), \quad k = \frac{1-a^2}{1+a^2})$$

が導かれる。従って、さらに $\alpha \geq \beta > 0$ を仮定して命題 5.2 を

$$P(R) = F(\sqrt{\beta}R, a) \quad (a = \sqrt{\beta/\alpha} \text{ とおく})$$

に対して適用すると、 $P(\sigma_C) \doteq 0.3935$ を満たす σ_C は近似的に以下のように特徴付けられる：

$$\sigma_C = \left((1/\sqrt{\alpha}) + (1/\sqrt{\beta}) \right) / 2 = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sqrt{1-\rho^2}\sigma_X\sigma_Y} \quad \cdots \quad (1.4.1).$$

なお、上式において第二の等号は命題 5.3 の二次方程式に対する解と係数の関係にもとづいて得られる。第 1.3 節と同様に、式の対称性を勘案して $\alpha \geq \beta$ という仮定を外しても一般性を失わない。そこで、相関のある二次元分布 f_{XY} に対する CSE を (1.4.1) で表現される σ_C によって定義する。明らかに、相関がない場合 ($\rho \neq 0$) の σ_C は第 1.3 節の (1.3.3) に一致するので、本節で定義した CSE は相関がない場合の定義の自然な拡張となっている。

また、 σ_X の不偏推定値 $u_X = \{\sum x_i^2 / (n-1)\}^{1/2}$ 、 σ_Y の不偏推定値 $u_Y = \{\sum y_i^2 / (n-1)\}^{1/2}$ 、および σ_{XY} の不偏推定量 $u_{XY} = \sum x_i y_i / (n-1)$ を用いて、 σ_C の推定値 u を以下のように定める：

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{u_X^2 + u_Y^2 + 2\sqrt{1-\rho^2}u_Xu_Y}, \quad \rho = u_{XY}/u_Xu_Y \quad \cdots \quad (1.4.2).$$

1.5 検証点数に応じた CSE 推定値の誤差

前節までの議論により、正確度指標 CSE の推定値 u を (1.4.2) によって定めることができた。しかしながら、地理空間情報のサンプルにおいて得られる検証点数 n は一定ではなく、検証点数 n が小さいと推定値の誤差 Δu が大きくなると予想される。従って、CSE 推定値の制限値（上限値）は u ではなく、 u_{cor} ($u_{\text{cor}} = u + \Delta u$) によって見積もることが望ましいと考えられる。

つぎに Δu を求める（推定する）方法について考える。直接的に求めることは困難であると思われるので、 Δu_X と Δu_Y を何らかの方法で求め、誤差伝播公式を用いて Δu を定める方針を採用する：

$$\Delta u = (\partial h / \partial u_X) \Delta u_X + (\partial h / \partial u_Y) \Delta u_Y$$

ここで、 u の定義式 (1.4.2) の右辺を u_X と u_Y の関数とみなした： $u = h(u_X, u_Y)$ 。

本調査では、 Δu_X と Δu_Y として、一次元正規分布に関する命題 5.4 を参考にして得られる値：

$$\Delta u_X = \kappa_n u_X, \quad \Delta u_Y = \kappa_n u_Y$$

をあてはめる．ここで κ_n は命題 5.4 で導入される定数 $1/\sqrt{\{2(n-1)\}}$ である．

簡単な計算により，

$$\Delta u = \kappa_n u, \quad u_{\text{cor}} = u + \Delta u = (1 + \kappa_n) u \quad \cdots \quad (1.5.1)$$

であることが分かる． κ_n の値は $n = 10$ で約 0.2, $n > 50$ では高々 0.1 程度である．

1.6 バイアスの処理

残差成分値 $x_i = sx_i - ex_i$, $y_i = sy_i - ey_i$ を実現値として持つ確率変数 X, Y を出発点として，正確度指標 CSE を導入・拡張し，CSE の推定値とその誤差の計算方法を提案してきた．ここで留意しなければならないのは，確率変数 X, Y に対して条件 (1.2.1) が仮定されていることである．他方，地理空間情報の現実のサンプルにおける残差成分値 x_i, y_i には，一般的に異常値や系統的なずれ等に伴うバイアスが含まれ， $\langle x \rangle = 0$, $\langle y \rangle = 0$ が満たされるとは限らない．正確度の指標である CSE の推定値を計算するためには，正確度を推定するという前提を保ちつつ，バイアスを除去する方法を前処理として与えなければならない．現実には，バイアスの原因を完全に特定し，合理的に除去することは必ずしも容易ではないため，バイアスの原因に関して大まかな仮定をおいたうえでバイアスの影響を極力除去し，正確度指標 CSE を推定する必要がある．

まず，バイアスが生じる原因を，以下の (a) (b) いずれかであるものと仮定する：検証点の成果値集合 $\{(sx_i, sy_i)\}$ ，もしくは基準値集合 $\{(ex_i, ey_i)\}$ について，(a) 異常値が含まれる，もしくは，(b) 真値からの系統的なずれが生じている．とくに，(a) の異常値が含まれる背景としては，経年変化による成果値と基準値のずれや，基準値の測定の異常が考えられる．

つぎに，バイアスの処理方法について，以下の二段階の処理を施す．

第一段階は異常値に対する処理である．理想的には，異常値をもつ検証点を抽出して除去し，残った検証点の配置が偏っている場合には全検証点を取得しなおす必要がある．しかしながら，予算の制約などにより，そのような作業を実践することが困難である場合が多い．本調査で用いた地理空間情報サンプルの検証点も，残念ながら合理的に異常値を除去できる状態にはなかった．代替案として，調査対象とする地理空間情報のサンプルの集合のうち，検証点数が十分に大きいサンプルのみを抽出して正確度調査の対象とする．検証点数の大きさにより， $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ の値をノイズレベルに低減することが期待されるからである．

第二段階は CSE の推定値の設定処理である． $(x_i^{\wedge}, y_i^{\wedge}) = (x_i - \langle x \rangle, y_i - \langle y \rangle)$ とおくと， $(\langle x_i^{\wedge} \rangle, \langle y_i^{\wedge} \rangle) = (0, 0)$ が成立するから， $x_i^{\wedge}, y_i^{\wedge}$ に対して (1.4.2) によって CSE 推定値 $u = u^{\wedge}$ を定めることができる．この値 $u^{\wedge}$ は， $u_X^b = \{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2 / (n - 1)\}^{1/2}$, $u_Y^b = \{\sum (y_i - \langle y \rangle)^2 / (n - 1)\}^{1/2}$ ，および $u_{XY}^b = \sum (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle) / (n - 1)$ を用いて定められる値 u^b ：

$$u^b = \frac{1}{2} \sqrt{u_X^{b2} + u_Y^{b2} + 2\sqrt{1 - \rho^2} u_X^b u_Y^b}, \quad \rho = u_{XY}^b / u_X^b u_Y^b \quad \cdots \quad (1.5.1)$$

と一致する．つまり，(1.5.1) で定まる値 u^b は，(1.4.2) で定まる値 $u = u^{\wedge}$ を，バイアスがある場合へ自然に延長したものである．さらに，バイアスに関する仮定と第一段階の処理により， $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$ はほぼ系統的なずれを表すものと見なせるから，これを差し引いて定まる u^b は残差 x_i, y_i の正確度を表現する指標であると解釈できる．

以上により，(1.5.1) で定義される u^b を（バイアスがある検証点残差に対する）CSE の推定値と定め，記号としては添え字 b を省略して u に統一する．記号 u_X^b, u_Y^b, u_{XY}^b についても，各々 u_X, u_Y, u_{XY} に統一する．

2. 指標の実勢値の調査

2.1 数値地形図サンプルの抽出

本節では，第 1 章で定めた CSE 推定値を用いて，地理空間情報のサンプルの集合から CSE の実勢値（推定値の平均値や実質的な制限値）を見積もる．地理空間情報の全サンプルは，平成 14 年～平成 19 年に整備され，その後検証点が取得された縮尺 1/2500 相当の基盤地図情報合計 229 サンプルである．

但し，検証点の異常値が適正に抽出・除去されていないため，異常値の影響を極力除去できるよう検証点数 n が 50 以上である 26 サンプルのみを抽出した．この 26 サンプルのうち 24 サンプルはバイアスの絶対値 $R_m := \{\langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2\}^{1/2}$ が 0.0m～0.2m の範囲に連続的に分布しているが，残りの 2 サンプルは 0.2m を大きく超えて孤立的に分布している（図-1 の左）．

この 24 サンプルについては，相関係数 ρ の推定値 $u_{XY}/u_X u_Y$ は理想的な値 0 の近傍で -0.3～0.2 と連続的に

分布しており、標準偏差比率 $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ の推定値 $u_{\min}/u_{\max}$ も理想的な値 1 の下方近傍で 0.7~1.0 と連続的に分布している（図-1 の中・右）ことから、座標成分間に強い相関は見られない。

そこで、バイアスの影響が小さい 24 サンプルを調査対象として CSE の実勢値を見積もることとする。

2.2 CSE 推定値の計算

第 1 章の議論により、相関やバイアスを含む検証点残差に対する CSE の推定値、およびその誤差を考慮した補正值（上限値）は各々：

$$\text{CSE 推定値} : u = \frac{1}{2} \sqrt{u_X^2 + u_Y^2 + 2\sqrt{1-\rho^2}u_X u_Y}, \quad \rho = u_{XY}/u_X u_Y$$

$$(u_X^2 = \sum (x_i - \langle x \rangle)^2 / (n-1), u_Y^2 = \sum (y_i - \langle y \rangle)^2 / (n-1), u_{XY} = \sum (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle) / (n-1))$$

$$\text{CSE 推定補正值（上限値）} : u_{\text{cor}} = (1 + \kappa_n)u, \quad \kappa_n = 1/\sqrt{2(n-1)}$$

で与えられた。これらの式に基づき、第 2.1 節で抽出された 24 サンプルに対して計算をすると、CSE 推定値は 0.3~0.4m を平均値にもち、補正值（上限値）は概ね 0.8m 以下に収まった（図-2）。

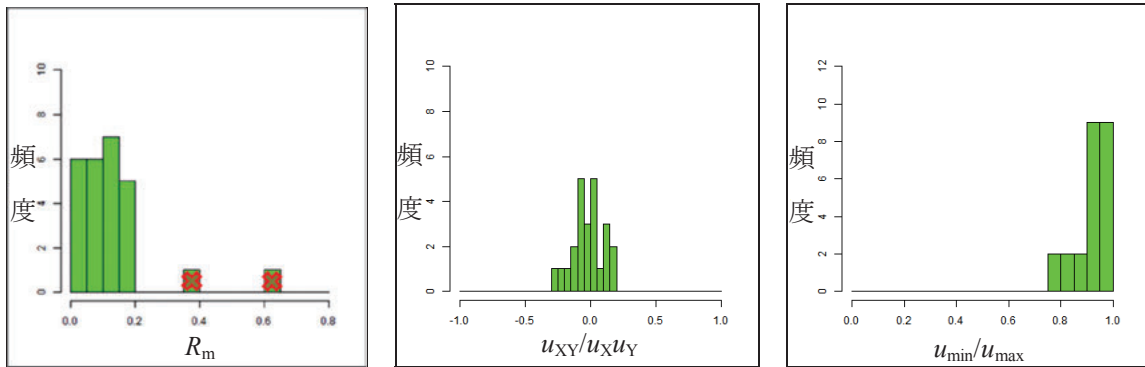


図-1 バイアス（左）・相関係数（中）・標準偏差比率（右）

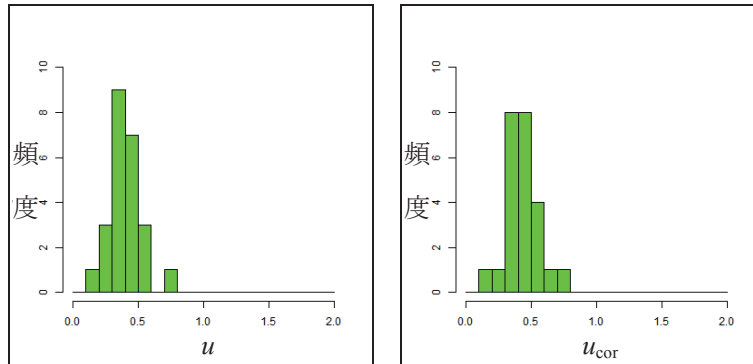


図-2 CSE の推定値： u （左）・ u_{cor} （右）

3. 指標の定義と実勢値に関する議論

3.1 FGDC の定める指標値（RMSE）と CSE の関係

米国連邦地理データ委員会（FGDC）では、地理空間情報の平面位置正確度を表現する指標値として、平均二乗誤差（以下「RMSE」と呼ぶ）を採用している。数値地形図サンプルに対して第 1.2 節で得られた検証点残差 x_i , y_i に対して、RMSE の定義は、

$$\text{RMSE} = \begin{cases} \sqrt{\sum (x_i^2 + y_i^2) / 2n} & : \sigma_X = \sigma_Y \text{ の場合} \\ \left(\sqrt{\sum x_i^2 / n} + \sqrt{\sum y_i^2 / n} \right) / 2 & : \sigma_X \neq \sigma_Y \text{ の場合} \end{cases}$$

で与えられる（FGDC, 1998）。但し、確率変数 X と Y の間には相関がない（ $\rho = 0$ ）と仮定され、残差成分値にバイアスが含まれている場合には事前に可能な限り取り除くこと（ $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$ ）が前提とされている。

る。これらの仮定と前提により、 n がある程度大きい場合には、

$$\text{RMSE} \doteq (u_X + u_Y) / 2 = (1.3.4) \text{の中で定義される } u$$

となる。すなわち、RMSE は CSE の推定値にほぼ一致することがわかる。

3.2 国内外の基準値と CSE の実勢値の比較

本調査冒頭の要旨で述べたように、公共測量の作業規程の準則（国土交通省, 2013）において標準偏差と呼ばれる指標の制限値が設定されており、縮尺が 1/2500 に相当する地図表現精度を有する地理空間情報に対する平面位置の標準偏差は、新規測量の場合には 1.75m 以内、修正測量の場合には 2.50m 以内と規定されている。但し、標準偏差の定義は明示的ではなく、本調査で得られた CSE や RMSE との関係は不明である。

他方、国外においても、地理空間情報の平面位置正確度に関する制限値がいくつか知られている。村上ほか (2010) の調査によれば、米国地質調査所 (USGS) が 1947 年に定めた中小縮尺図に対する制限値は RMSE 換算で地上約 0.6m、国連アジア極東地域地図会議が 1958 年に勧告した制限値は、精度が高い地図 (A 級) では地上約 0.6m、精度がそれよりも劣る地図 (B 級) では地上約 1.2m とされている。

準則における標準偏差の定義が明確ではないため、国内外の制限値を直接的に比較することは不可能である。そこで、本調査では公共測量成果である基盤地図情報 (縮尺 1/2500 相当) の平面位置正確度を、サンプル抽出によって計算した。その結果、CSE 推定値の平均値は 0.3~0.4m 程度、上限値は概ね 0.8m であることという見積もりが得られた (第 2.2 節)。この見積もりは、地理空間情報の平面位置正確度の指標として CSE を採用するならば、指標制限値を国外の制限値並に厳しくする必要性を示唆している。

4. まとめ

地理空間情報の平面位置正確度に関する準則の現行基準（国土交通省, 2013）は見直す必要がある。第一に正確度の基準を数学的に明示する必要がある。定義の明確さや諸外国の基準との整合性を考慮すれば、CSE に由来する推定量を採用することが合理的である。第二に平面位置正確度の制限値は現行の値よりもかなり厳しく設定することが現実的である。

他方、制限値としてどのような値を採用すべきかについては更なる調査検討が必要である。本調査では制限値のひとつの候補値として 0.8m という値を得たが、検討の過程で明らかになったように、地理空間情報のサンプルの検証点残差からバイアスを合理的に除去して正確度指標を精密に絞り込むことは実務上の限界がある。したがって、制限値の設定には別の観点からの調査が必要であると予見される。今後は、地理空間情報の調製にかかる各種測量工程毎の誤差を技術の進展も踏まえて定量的に見積もり、制限値をさらに絞り込むことを試みたい。

5. 補足説明

本節では、主に第 1 章で必要とされる数式や数値解析についてとりまとめる。第 1 章の複数箇所から引用される、もしくは、数式の背景にある概念を補う必要があるなどのため、第 1 章の議論展開から分離させて、本章に集約する。

命題 5.1 (Greenwalt-Shultz, 1968)

$$g(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sigma_X^2} + \frac{\sin^2\theta}{\sigma_Y^2}\right)\right\}$$

に対して、

$$\int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} g(r, \theta) dr d\theta = \frac{2a}{1+a^2} \int_0^x e^{-v} \cdot I_0(kv) dv$$

$$\left(a = \sigma_X / \sigma_Y, \quad x = \frac{R^2}{4\sigma_Y^2} \left(\frac{1+a^2}{a^2} \right), \quad v = \frac{r^2}{4\sigma_Y^2} \left(\frac{1+a^2}{a^2} \right), \quad k = \frac{1-a^2}{1+a^2}, \quad I_0(\cdot): 0 \text{ 次の第一種変形ベッセル関数} \right)$$

が成立する。

証明: $LHS = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} r \cdot \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sigma_X^2} + \frac{\sin^2\theta}{\sigma_Y^2}\right)\right\} dr d\theta$

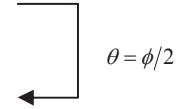
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{r=0}^R r \exp\left\{-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_Y^2}\right)\right\} \cdot 4 \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} \exp\left\{-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_X^2} - \frac{1}{\sigma_Y^2}\right) \cos 2\theta\right\} d\theta \right] dr$$

$$\sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$$

$$\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$$

$$= \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \int_{r=0}^R r \exp \left\{ -\frac{r^2}{4\sigma_y^2} \left(1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \right) \right\} \cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4\sigma_y^2} \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - 1 \right) \cos \phi \right\} d\phi \right] dr$$

$$= \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \int_{r=0}^R r \exp \left\{ -\frac{r^2}{4\sigma_y^2} \left(1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \right) \right\} \cdot I_0 \left(\frac{r^2}{4\sigma_y^2} \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - 1 \right) \right) dr = RHS.$$



(証明終)

命題 5.2 (Greenwalt-Shultz, 1968)

$$F(b, a) = \frac{2a}{1+a^2} \int_0^{\frac{b^2(1+a^2)}{4}} e^{-v} \cdot I_0 \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} v \right) dv \quad 0 \leq a \leq 1, I_0(\cdot): 0 \text{ 次の第 1 種変形ベッセル関数}$$

とおく. このとき,

方程式 $F(b, a) = 0.3935$ は, 直線 $b \approx 0.5 + 0.5a$ で近似できる.

結論を導く手法は Greenwalt-Shultz (1968) において与えられていないが, 数値解析の手法を用いて結論式を再現することが可能である. また, 結論式の適用範囲は特に指定されていないが, a の値が小さくなるほど近似の精度は相対的に劣化する (図-3).

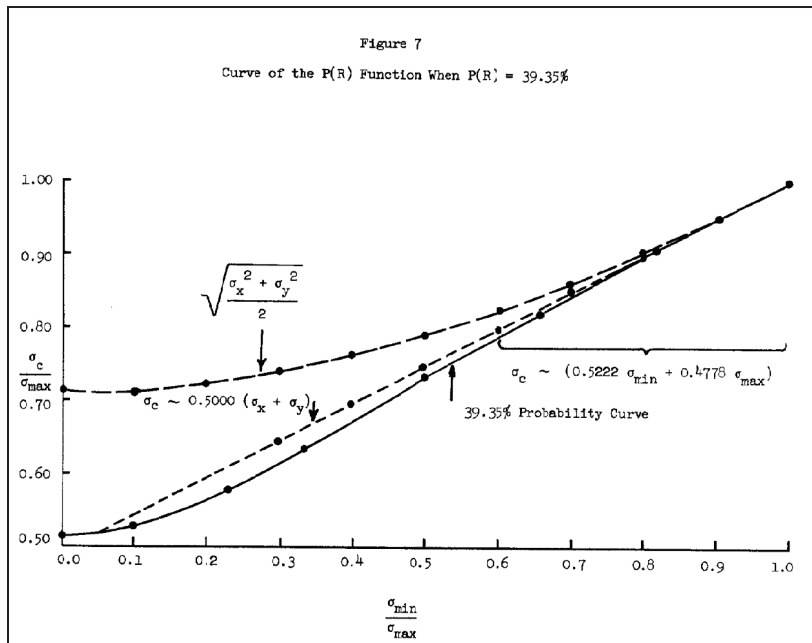


図-3 横軸 a と縦軸 b の関係

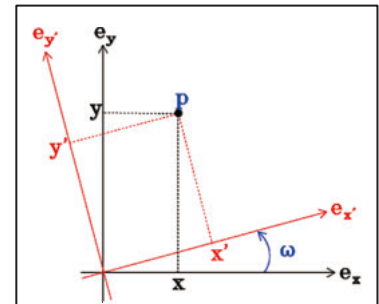


図-4 座標軸の回転

命題 5.3

$$A > 0, B > 0, AB - H^2 > 0 \Rightarrow Ax^2 + 2Hxy + By^2 = \alpha x'^2 + \beta y'^2$$

ここで,

- α, β は二次方程式 $\lambda^2 - (A+B)\lambda + (AB - H^2) = 0$ の解
- $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ここで, $\omega = \begin{cases} \tan^{-1}(2H/(A-B)) & (A \neq B) \\ \pi/4 & (A = B) \end{cases}$ とおく.

とする.

証明: 以下の式

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Hxy + By^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} A & H \\ H & B \end{bmatrix}$$

で定まる M は正則な対称行列ゆえ、直交行列で対角化可能である。すなわち、

$$M \begin{bmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{bmatrix}, \quad M \begin{bmatrix} -\sin \omega \\ \cos \omega \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -\sin \omega \\ \cos \omega \end{bmatrix}$$

を満たす ω , α , β が存在する。とくに α と β は固有方程式 $\det(M - \lambda I) = 0$ の解として与えられる。図-4 のように反時計周りに座標軸を ω 回転することによる (x, y) の変換座標を (x', y') とおく：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \cdots (\star)$$

すると、

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \alpha x'^2 + \beta y'^2$$

である。特に、上式の第二式に $(\star)$ を代入したときに $x'y'$ の項が消去されるべきであるという条件から、 ω の値が結論のように定まる。(証明終)

母数の推定に関する復習と補足：次に、母数の推定の一般的な考え方を復習しつつ、標本標準偏差の誤差を評価する式を導く。確率分布 f_X に従う確率変数 X について、分布の母平均 m_X と母分散 σ_X^2 が未知であるとする。このとき、標本 $x_1, \dots, x_n$ を取得することにより、標本平均、標本不偏分散と呼ばれる指標が各々：

$$\langle x \rangle = \sum x_i / n, \quad u_X^2 = \sum (x_i - \langle x \rangle)^2 / (n-1)$$

で定まる。これらの指標を各々確率変数：

$$\langle X \rangle = \sum X_i / n, \quad U_X^2 = \sum (X_i - \langle X \rangle)^2 / (n-1)$$

の実現値と見なす。ここで、 $X_1, \dots, X_n$ は X と同一の確率分布 f_X に従うお互いに独立な確率変数である。これらの確率変数が、母数（母平均、母分散）の不偏推定量となる：

$$E[\langle X \rangle] = m_X, \quad E[U_X^2] = \sigma_X^2$$

ことはよく知られている。従って、指標 $\langle x \rangle$, u_X^2 が各々母平均 m_X と母分散 σ_X^2 の不偏推定値として採用される。さらに、確率変数 U_X の平均 $E[U_X]$ と分散 $V[U_X]$ に関して、以下が導かれる：

命題 5.4 (吉澤, 2004)

$X \sim f_X = N(m_X, \sigma_X^2)$ ならば、

$$E[U_X] = c_n \sigma_X, \quad V[U_X] = d_n^2 \cdot \kappa_n^2 \cdot \sigma_X^2$$

が成立する。ここで、 κ_n, c_n, d_n は

$$\kappa_n = 1/\sqrt{2(n-1)}, \quad c_n = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \approx 1, \quad d_n = \sqrt{2(n-1)(1-c_n^2)} \approx 1$$

で定義される。とくに、

$$\text{確率変数 } U_X \text{ の標準偏差} \doteq \kappa_n \sigma_X$$

である。

(公開日：平成 26 年 3 月 3 日)

参考文献

- Federal Geographic Data Committee (1998): Geospatial Positioning Accuracy Standards, Part3: National Standard for Spatial Data Accuracy, FGDC-STD-007.3-1998, <http://www.fgdc.gov/standards/projects/FGDC-standards-projects/accuracy/part3/chapter3> (accessed 19 Jun, 2013).
- Greenwalt, C.R. and M.E. Shultz (1968): Principles of error theory and cartographic applications, ACIC Technical Report No.96.
- ITS Japan (2013): 道路情報基盤活用委員会 2012 年度活動報告書, ITS Japan, 道路情報基盤活用委員会.
- 国土地理院 (2007): 品質の要求, 評価及び報告のための規則 Ver 1.0, 国土交通省国土地理院, <http://www.gsi.go.jp/common/000021696.pdf> (accessed 23 Jan, 2014).
- 国土交通省 (2013): 公共測量作業規程の準則, <http://psgsv2.gsi.go.jp/koukyou/jyunsoku/index.html> (accessed 19 Jun, 2013).
- 村上真幸, 鎌田高造, 田中大和, 出口智恵, 島田久嗣 (2010): 大縮尺地理空間情報の平面位置正確度の評価の結果, JpGU Meeting 発表原稿.
- 吉澤康和 (1989): 新しい誤差論—実験データ解析法—, 261pp, 共立出版.