

日本の測地測量における統合処理の考察

＝ジオイド高の考察を中心として＝

Study of Combined Adjustment in Geodetic Network of Japan

地殻調査部 中根勝見

Crustal Dynamics Department Katsumi NAKANE

企画部 黒石裕樹

Planning Department Yuki KUROISHI

要 旨

角及び距離等の地上観測値並びにGPS観測値等の座標系が異なる異種観測値の精密な統合処理には、詳細なジオイド高及び鉛直線偏差が必要である。本論では、それらジオイド高等との関係で異種観測値の統合処理法を考察する。

(1) 楕円体面上での処理(投影法): 日本周辺の局所ジオイドモデルJGEOID93(Kuroishi, 1995)を、GPS/水準の観測値を与件とした最小2乗コロケーション法により修正し、詳細ジオイド高の推定を試みた。その結果、極短波長ジオイドの信号の影響は無視できる程度に小さく、JGEOID93のもつトレンド(傾斜誤差)を修正しただけで、十分な確度をもった詳細ジオイド高が得られる。この重要な結論から、詳細ジオイドから求めたジオイド高は観測値として扱へ、GPS観測値及び角などの地上観測値と同時に統合処理することができる。この詳細ジオイドを用いてGPS観測値から標高を決定する場合、調査地域の測地網内に100km²に1点程度の密度でGPS/水準の観測点を配置すれば、高さの確度3cm程度が期待できる。

(2) ジオイド面上での処理(展開法): JGEOID93を用いない場合、調査地域の測地網内に100km²に1点の密度でGPS/水準点を設けると未知点の高さの確度は5cm程度となるが、GPS/水準点密度がこれより粗になると著しくその確度が悪くなる。そのため、基準点測量作業規程などの方法によりGPS観測値から高さを求める場合、GPS/水準点を少なくとも100km²に1点以上配置しなければならない。また、この基準点測量作業規程による手法は、ジオイド面と楕円体面の傾きが調査地域全域で一様であるとの仮定で成り立っているため、広域の処理ができない。この手法により広域的処理をするためには、ジオイド面と楕円体面の傾きを調査地域全域にわたり一様とするのではなく、調査地域を分割してその各区分地域ごとにジオイド面と楕円体面の傾き仮定すればよい。ジオイドを多面体近似で扱うのである。

(3) 角の観測値の処理: 鉛直線偏差には天文偏差とJGEOID93から得られる重力偏差の二つがあり、両者の比較を行いその較差を調べた。比較した約3,600箇所

のうち、較差が10秒を越えるものは、山岳地域及び島部に限られ全体の2%である。角の観測値の処理は天文観測から求めた天文偏差を用いて準拠楕円体面へ投影する古典的な方法を採用する。天文偏差の誤差が水平角へ及ぼす誤差は無視できる。山岳地域など天文偏差の誤差の大きいところでは、誤差の高度角へ及ぼす影響は無視できない。これらの地域での鉛直線偏差の処理が、今後の一つの課題である。

1. はじめに

最近、測地測量へのGPSの利用は著しい。GPSは、人工衛星の電波の受信できない場所では利用価値がない。その場合、トータルステーション(TS)を用いた地上測量によらなければならない、GPS観測値との統合処理が必要になる。

GPS観測値と座標系の異なるTS観測値のような異種観測値を正確に統合処理する場合、異種システム間の調和をはかるためにジオイド高及び鉛直線偏差の仲立ちが必要である。そのデータとして、国土地理院が戦後半世紀にわたり蓄積してきた重力測量及び天文測量の結果などを活用する。

国土地理院が有している重力データ及び名古屋大学など他機関の所有している重力データ並びに海上重力データを用いて、日本周辺のジオイドモデル「JGEOID93」が開発された(Kuroishi, 1995)。このモデルは、3'×3'の格子点上のジオイド高を表している。復元された最小波長は約10kmで、必ずしも十分な分解能と言えない。また、このジオイドモデルは、極めて長い波長での系統的な傾斜誤差を有していることが報告されている。そのため、このジオイドモデルのジオイド高を標高の絶対値決定にそのまま用いることはできない。

そこで、現在地上において最も確度の高いジオイド高の測定であるGPS/水準の観測値を用い、最小2乗コロケーション(LSC)法によりJGEOID93を修正して詳細ジオイドの決定を行う。この詳細ジオイドを仲立ちに、GPS観測値を用いた測地網の高さの決定が可能であると考えられる。こうした方法を採用すれば、JGEOID93はGPS観測値の処理に極めて有効なジオイ

ドモデルであることが今回の調査で分かった。

国土地理院は、ジオイドの決定を主な目的として、1949年から1994年の約半世紀の間に462点の天文観測を実施した。この観測点間距離は30km程度で、十分な密度でない。これら天文観測点では鉛直線偏差を計算できるが、その観測鉛直線偏差に基づいた内挿により日本の陸地内の任意の場所の鉛直線偏差を推定できる。現在、 $5' \times 7.5'$ の格子点上の約3500ヶ所に対して内挿により推定された鉛直線偏差がある。鉛直線偏差は、ジオイドの微分量に相当し、地形質量による引力等ジオイドの短波長成分の影響を強く受ける。そのため、内挿に当たってはこの短波長成分の地形補正を行い、内挿精度が高められている（中根他 1995）。

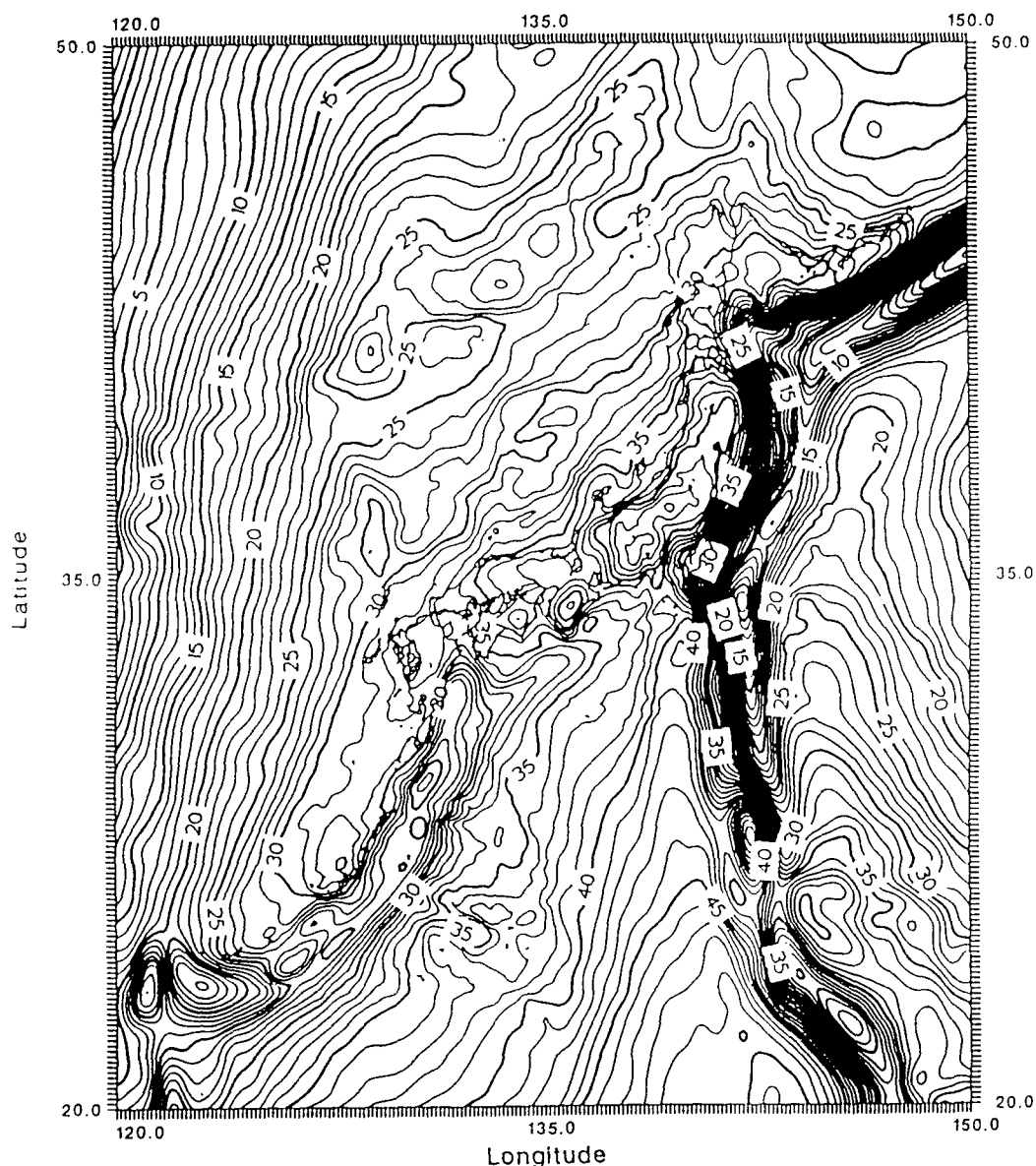
一方、鉛直線偏差は、JGEOID93からも推定できる。このような重力値により推定されたジオイドモデルから

計算される鉛直線偏差は、重力偏差と呼ばれている。それに対して、天文観測から求めた鉛直線偏差を天文偏差と言う。今回の調査では、これら二つの種類の鉛直線偏差を比較検討して、両者の確度を確かめた。

こうした考察の結果、JGEOID93から得られたジオイド高を観測値として扱い、GPS観測値等と同時に統合処理ができることが分かった。また、ジオイド高及び鉛直線偏差がない場合の統合処理についても考察した。以下にその詳細を述べる。

2. JGEOID93の特徴

黒石により開発されたJGEOID93は、日本周辺の局所ジオイドモデルであって、 $20^{\circ}-50^{\circ}\text{N}$, $120^{\circ}-150^{\circ}\text{E}$ の範囲をカバーしている（第1図）。使用データは、国土地理院の有する $4' \times 6'$ の格子内に少なくとも1点の測定



第1図 日本周辺の局所ジオイドモデル JGEOID93によるジオイド高 コンター間隔 1m (Kuroishi, 1995による)

点を配した17,000ヶ所の重力値及び名古屋大学所有の重力値など地上の約38,000ヶ所の重力値並びに約450,000ヶ所の海上重力値である。方法は、OSU91Aを基準ポテンシャルに用い、ITRF89系を準拠座標系としたストークス積分の球面近似FFT法によるものである。

地球重心のITRF89系において、ジオイド計算を実施するため、日本測地系に基づいた重力データ及び地形グリッドに対して、次のような座標変換を行った。

① 日本測地系からITRF89系のGRS80座標系への座標変換パラメータ

VLBIによる国内6測点の座標比較に基づき、両座標系の変換には有意な精度の範囲内で、次の偏心パラメータを用いればよいことが分かっている(飛田 1992)。

$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -148.11\text{m} \\ 508.80\text{m} \\ 680.97\text{m} \end{bmatrix}$$

ここに、XYZはZ軸を地軸方向、X軸をグリニッジ平均子午線方向とする右手系デカルト座標系である。添字G及びTはそれぞれITRF89系GRS80座標値及び日本測地系座標値を示す。

② 日本測地系の座標値のデカルト座標系への変換

次式は測地座標 (ϕ, λ, h) のデカルト座標系への変換公式である。ただし、 h は楕円体高； N は緯度 ϕ における卯酉線曲率半径； e はベッセル楕円体の第1離心率である。

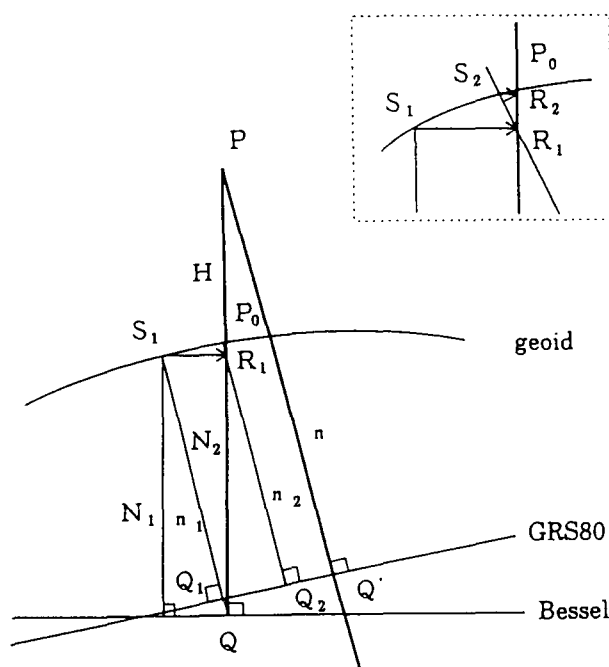
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ \{N(1-e^2)+h\}\sin\phi \end{bmatrix}$$

一般に重力点の座標は楕円体高でなく標高が与えられており、厳密な座標変換には二つの高さのシステムの差つまりジオイド高が必要となる。現時点で正確なジオイド高は未知であるが、OSU91Aモデルで与えられるジオイド高のモデル値を用いて座標値の精度以内でジオイド高を与えられることが報告されている(Kuroishi, 1995)。詳細は前記報告を参照されたいが、イタレーション法(反復改良計算)により日本測地系に対する各重力点位置でのモデルジオイド高が得られる。

このような処理の結果得られた日本のジオイドモデルJGEOID93は、ITRF89系GRS80座標に対して決定されたものである。日本測地系座標値に対して直接使用可能とするため、日本測地系における $20^\circ-50^\circ\text{N}$, $120^\circ-150^\circ\text{E}$ の範囲での $3' \times 3'$ 正規メッシュのジオイドモデルが次のように作成された。

- ① 日本測地系の正規メッシュグリッド各点 $(B_i, L_i, 0)$ (楕円体高=0として)をITRF89系GRS80座標値へ変換する。
- ② 変換で得られたGRS80座標位置でのOSU91Aモデルジオイド高 (N^{OSU}_i) はGRS80での $3' \times 3'$ 正規メッシュグリッドのジオイド高から双二次内挿により決定する。

- ③ 得られたモデルジオイド高で示されるジオイド上の点 $(\phi, \lambda, N^{OSU}_i)$ を座標変換により日本測地系座標値 (B, L, h) を求める。
 - ④ 日本測地系座標値の楕円体高 h を求めるグリッド点でのモデルジオイド近似値として①～③を収束するまで繰り返す。
 - ⑤ 収束後得られた日本測地系の正規メッシュグリッド各点 (B_i, L_i, N_i) に対応するITRF89系GRS80の座標値 $(\phi_i, \lambda_i, h_{ii})$ でのジオイド高をJGEOID93により双二次内挿により $(\phi_i, \lambda_i, N^J_i)$ を決定する。
 - ⑥ GRS80系から日本測地系へ座標変換することにより求める日本測地系正規メッシュでのグリッドジオイドモデル (B_i, L_i, N^J_i) を得る。
- 以上の手順を第2図に示してある。



第2図 反復改良によるジオイドの変換

3. 最小2乗コロケーション法によるJGEOID93の修正

重力観測値から決められたジオイドは重力ジオイドと呼ばれ、分布に関してはグローバルであるが、GPS観測値から標高を求めるための目的には確度が十分とは言えない。JGEOID93も重力ジオイドの一つである。それに対して、水準点上でGPS観測を行ったGPS/水準により得られたジオイド高は、最も確度の良いジオイド高測定値といえる。

一般に、重力ジオイド高とGPS/水準ジオイド高は一致しないが、調査地域内で適当な基準点を仮定しそれに対するジオイド比高で扱えば、統一的な議論ができる。この確度の良いGPS/水準により得られたジオイド比

高を既知として内挿により任意の点のジオイド比高を推定し、JGEOID93から得られたジオイド比高（以下ジオイド高と言う）を修正することが考えられる。このようにして決められたジオイド高を詳細ジオイド高と呼ぶことにする。

この詳細ジオイド高を推定するひとつの有力な方法は、LSCである。この方法に関する基礎概念、計算式などを考察し詳細ジオイド高の推定を試みる。

3-1 LSCを用いた詳細ジオイド推定の基礎概念

LSCは、重力、水準による比高など異なる種類の観測値を統一的に処理できる利点がある。今回の議論では、観測値の種類はジオイド高だけを扱う特別な場合であるので、必ずしもLSCによる必要はない。しかし、LSCは誤差を最小2乗の原理により処理でき、現実的な処理と考えるのでこの手法を採用する。

第3図にLSCによる詳細ジオイド推定の基礎概念を示してある。上段の●で示した点が、GPS/水準の観測点である。その観測されたジオイド高 N^G からJGEOID93により得られたジオイド高 N^J を差し引いて、観測値 L とする。中段は、JGEOID93のトレンドである傾斜誤差成分を表したものである。下段は、信号 s （観測点では t ）を表し、JGEOID93の分解能より小さい波長でのジオイドを示している。

信号は直感的には確定論的な物理量と考えられるが、LSCでは確率変数として扱う。この点がLSCの最もわかりにくい点である。その信号にはバイアスがなく、平

均値が零になることが条件である。また、LSCは、分布の均質性と等方性を仮定している。均質性とは、分布の緯度及び経度方向の積分の等値性が成立することである。等方性は、方向を回転させた積分が等値性を示すことである。

3-2 観測方程式

上記の基礎概念を基に詳細ジオイド高を求める観測方程式をつくると、次式のようにになる。

$$L = AX + t + n \quad (3-1)$$

ただし、

$$X = [a \quad b \quad c]^T$$

a, b : JGEOID93のもつ傾斜誤差の x 及び y 方向の傾斜率

c : x, y 座標原点におけるJGEOID93の傾斜のオフセット量

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix} \quad p \text{はGPS/観測点の数}$$

x_i, y_i : GPS/水準の観測点の座標値

N^J : JGEOID93によるジオイド高ベクトル ($p \times 1$)

N^G : GPS/水準により観測されたジオイド高ベクトル ($p \times 1$)

$L = N^G - N^J$: 観測値ベクトル ($p \times 1$)

t : GPS/水準点における信号ベクトル ($p \times 1$)

($M\{t\} = 0$: 信号の平均値にバイアスなし)

$M\{\cdot\}$: 平均のオペレータ

s : 任意の点における信号ベクトル ($q \times 1$) ($M\{s\} = 0$: 信号の平均値にバイアスなし), q は未知点の数

n : ノイズベクトル ($p \times 1$) (GPS/水準観測値の誤差, $E\{n\} = 0, E\{\cdot\}$: 期待値を与えるオペレータ

$$C_{tt} = M\{tt^T\} = \begin{bmatrix} C(0) & C(D_{12}) & C(D_{13}) & \cdots \\ & C(0) & C(D_{23}) & \cdots \\ \text{対称} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & C(0) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{: GPS/水準観} \\ \text{測点間の共分散行} \\ \text{列 (} p \times p \text{)} \end{array}$$

$C_{st} = M\{st^T\}$: GPS/水準の観測点と未知点間の共分散行列 ($q \times p$)

$C_{nn} = E\{nn^T\}$: ノイズ行列 ($p \times p$)

$\bar{C} = C_{tt} + C_{nn}$: GPS/水準観測値の共分散行列 ($p \times p$)

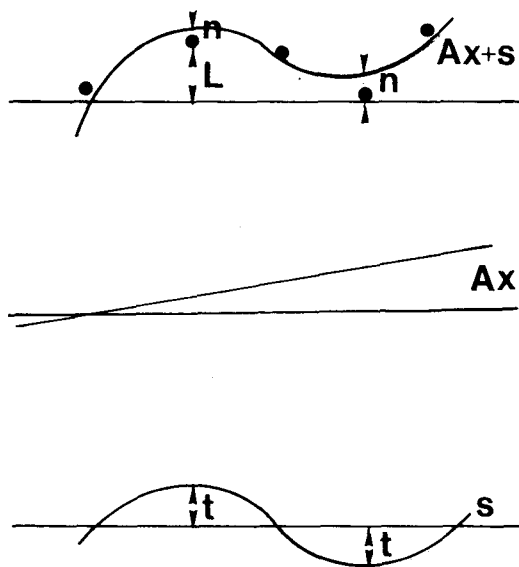
$C(D_{ij}) = C(0) \text{Exp}\{-k^2 D_{ij}^2\}$: 共分散関数

$C(0)$: 自己共分散, $D_{ij} = 0$ のときの共分散

D_{ij} : 観測点間 i, j 又は観測点 i と未知点間 j の距離

k : 定数, $D_{ij} = k$ のとき $C(D_{ij}) = C(0)/e$

$$\Rightarrow C(0)/3$$



第3図 最小2乗コロケーションの基本モデル

3-3 最小2乗解

観測方程式(3-1)式を最小2乗条件

$$t^T C_{tt}^{-1} t + n^T C_{nn}^{-1} n = \text{minimum} \quad (3-2)$$

を用いて解を求めると、次式を得る。

$$\hat{X} = (A^T C_{tt}^{-1} A)^{-1} A^T C_{tt}^{-1} L \quad \text{JGEOID93の傾斜の推定値} \quad (3-3)$$

$$\hat{s} = C_{st} C_{tt}^{-1} (L - A \hat{X}) \quad \text{信号の推定値} \quad (3-4)$$

$$\hat{N} = N^J - A \hat{X} - \hat{s} \quad \text{詳細ジオイド高}(\hat{N}) \quad (3-5)$$

$$E_{ss} = C(0) - C_{st}^T C_{tt}^{-1} C_{st} \quad \text{信号の誤差}$$

3-4 共分散関数の決定

信号が確率変数として扱われていることから、信号に関する共分散が決められなければならない。それは「ジオイド高の影響が距離にどのように左右されるか」という問題であって、それを定量化するために「共分散関数」を導入する。そのために、P及びQ間の共分散関数を次式のように定義する。

$$C(P, Q) = M\{N(P) \cdot N(Q)\} \quad (3-6)$$

この式は、PQ間の距離Dと同じ距離だけ離れた任意の2点P', Q'におけるジオイド高N(P')とN(Q')の積を調査地域全域にわたり平均した結果を示したものである。均質性及び等方性の性質からこのような処理が可能になっている。また、前述したように、LSCの成り立つ前提は信号の平均値にバイアスがないことである。このことは、調査地域全域でのジオイド高についての条件でもあり、次式で表せる。

$$M\{N\} = 0 \quad (3-7)$$

ジオイド高Nはn次の球面調和関数展開で表すことができ、共分散関数もn次の球面調和関数展開で表せる。今回の調査のように内挿という限られた目的で且つ全地球の取り扱いでない極めて局所的な場合、地球を局所的平面で表すことができる。このような場合、共分散行列 C_{tt} が正定値行列になるような条件を満たす平面共分散関数として、解析的な近似式を用いることができる。最もよく用いられているものが、次のGaussian関数である。

$$C(D_{ij}) = C(0) \text{Exp}\{-k^2 D_{ij}^2\} \quad (3-8)$$

ただし、 $C(D_{ij})$ は距離 D_{ij} での共分散を示し、 $C(0)$ は距離が零の場合つまり自己共分散を示している。kは定数である。

GPS/水準の観測値を与件としてJGEOID93を修正して詳細ジオイド高を求める場合、この与件となるGPS/水準の観測点間の距離はおおよそ10km以内である。こうした極めて限られた局所的な範囲に見合った次数の共分散関数の $C(0)$ 及びkを推定しなければならない。その推定にJGEOID93から、 $n=1800$ 程度(相当波長約20km)に対する次の結果を得た。

$$C(0) = (0.022)^2 \text{m}^2, k = 1.8 \text{km} \quad (3-9)$$

参考までに、次数 $n > n_0$ のハイパスフィルターにより取り出し $C(0)$ を算出した福田(1993)による結果を表-1に示してある。なお、この値はジオイド高でなくハ

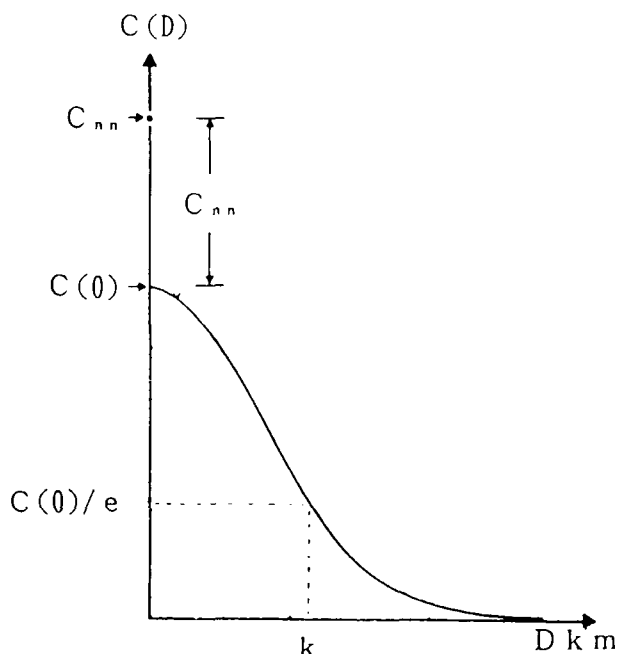
イトアノマリーによるものであるが、実用上はジオイド高と同じとみて差し支えない。また、ジオイド高の内挿の場合、共分散関数による影響が極めて小さいので、実用的にはあまり細かい議論は必要がないと思う。

表-1 共分散関数の定数(福田1993による)

n_0	$C(0)(\text{m}^2)$
1000	$11.30 = (0.034)^2$
300	$1052.29 = (0.324)^2$
80	$23216.78 = (1.524)^2$

3-5 ノイズ行列 C_{nn}

GPS/水準の観測値間には、相関関係がないものとして扱う。従って、 C_{nn} は対角行列となる。その対角要素の値は、GPS/水準の観測値の分散である。水準点の場合は、水準点の精度とGPS観測値の高さの精度に関係し標準偏差で1~3cm程度として扱う。三角点の場合、三角点の高さの精度とGPS観測値の高さの精度数cm程度であろう。第4図には共分散関数とノイズ行列の関係を示してある。



第4図 共分散関数

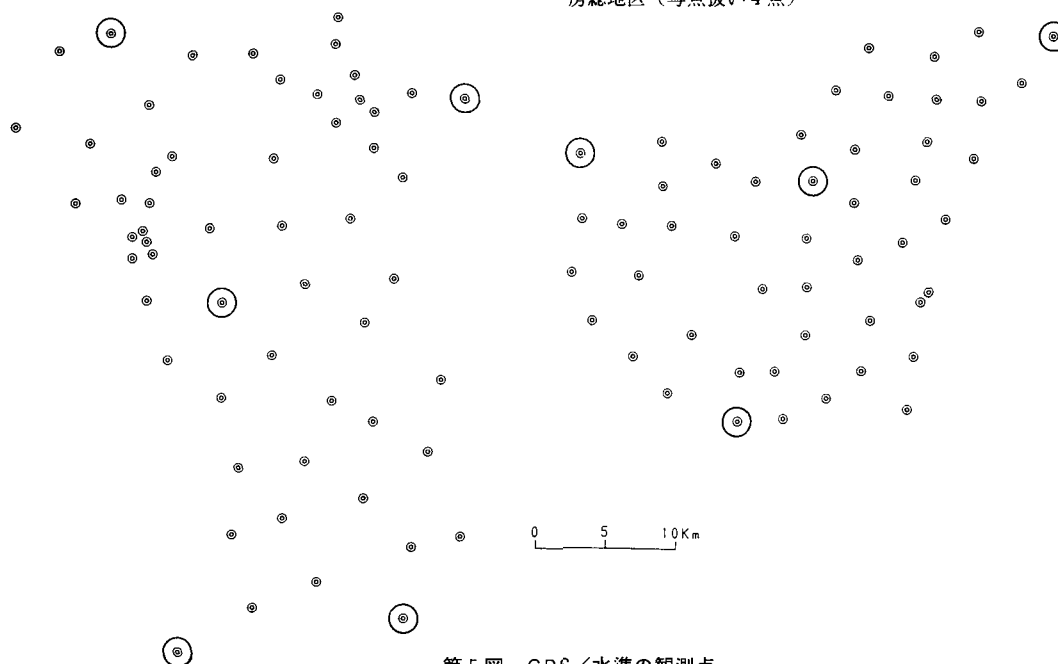
4. 詳細ジオイド高の推定とその考察

以上考察した方法により、名古屋地区及び房総地区のジオイド高の内挿精度を推定した。

第5図に名古屋地区におけるGPS/水準の観測点を示してある。総点数は、56点である。同様に、第5図に房総地区のGPS/水準点の観測点を示してある。総点数は、49点である。これらの地区から第4、5図に示す適当な数の既知点◎を選び、他の点を未知点としてその

名古屋地区（与点扱い5点）

房総地区（与点扱い4点）



第5図 GPS/水準の観測点

未知点のジオイド高を推定する。各未知点ともGPS/水準点であり観測されたジオイド高があるので、その観測値と推定値の差から残差を求めて標準偏差を計算した。その結果を表-2及び3に示してある。

表-2 名古屋地区の内挿精度（標準偏差）

内挿手法	与点として用いた GPS/水準観測点数	5点	10点	18点
	GPS/水準観測点密度	14km×14km	10km×10km	8km×8km
JGEOID93の傾斜誤差のみ修正内挿		0.020	0.017	0.015
JGEOID93を基準面としたLSC内挿		0.020	0.016	0.015
平面を基準面としたLSC内挿		0.070	0.035	0.035

表-3 房総地区の内挿精度（標準偏差）

内挿手法	与点として用いた GPS/水準観測点数	4点	8点	14点
	GPS/水準観測点密度	14km×14km	10km×10km	8km×8km
JGEOID93の傾斜誤差のみ修正内挿		0.030	0.026	0.024
JGEOID93を基準面としたLSC内挿		0.030	0.029	0.024
平面を基準面としたLSC内挿		0.135	0.044	0.046

これらの計算結果から、次のことが言える。

- ① JGEOID93を基準面として用いた場合（3-3）式による傾きの修正だけでよく、（3-4）式による信号の修正量は極めて小さく実用的には考慮する必要がない。
- ② JGEOID93を基準面とした場合の未知点の高さの確度は、GPS水準点から5km程度の距離で2～3

cmである。従って、未知点の高さの確度2～3cmを期待する場合、100km²に1点の割合でGPS/水準点を設ければよい。

- ③ JGEOID93の代わりに平面を用いた場合の未知点の高さの確度は、GPS/水準の観測点間が5kmを越えると著しく悪くなる。
- ④ 房総地区より名古屋地区の内挿精度がよい。この原因は、房総地区は海溝・トラフに近いこと短波長のジオイド起伏が激しいことに起因している可能性がある。
- ⑤ JGEOID93の傾きは下記のとおりである。（ ）は、後述の表-5による天文偏差との比較により求めた関東・東海及び中部・近畿地区の平均的なJGEOID93の傾きである。

房総地区 0.0ppm(0.0ppm) 南北 4.0ppm(6.1ppm)西上がり

名古屋地区 0.4ppm(1.3ppm) 北上がり 1.3ppm(3.9ppm)西上がり

- ⑥ 今回の調査地域である名古屋及び房総地区は、他の地域より比較的重力観測点密度が高くJGEOID93の精度が高いと推定できる。従って、地域によっては上述の結果より高さの推定確度は悪くなる可能性がある。

なお、平面を基準面とした場合のLSC内挿の結果は、竹本（1993）による。

5. ジオイド高を観測値とする統合処理

GPS観測から高さを求める最も単純な手法の手順は、

- ①GPS観測網を1点固定により処理し各点の橢円体高を求める
- ②網内に配置された水準点上における高さとして

の水準点上におけるGPS観測値から求めた楕円体高によりジオイド高を求める③その水準点上のジオイド高を既知として未知点のジオイド高を内挿により推定する④内挿により得られたジオイド高を楕円体高に加えて未知点の高さとする、と言うものである。

JGEOID93の精度は地域により異なるが、大雑把な見積もりでは、100km²に1点の割合でGPS/水準点を設ければ、3cm程度の確度による内挿が期待できる。このJGEOID93を用いて内挿をする場合、その傾きの誤差だけを修正すればよい、という重要な結論を得た。そのため、JGEOID93から得たジオイド高を観測値として扱い、GPSなどの観測値との同時統合処理ができるようになり、上述したような面倒な手続きの必要がなくなった。その観測方程式について考察してみる。

5-1 ジオイド高の観測方程式

ジオイド高を観測値として扱い、GPS観測値及び地上観測値と統合して処理する場合の観測方程式は、次式で表せる。

$$v + N^j = N + dN, \quad dN = ax + by + c \quad (5-1)$$

ただし、 v ：残差、 N ：ジオイド高の概算値、 N^j ：JGEOID93、 a ：JGEOID93のx軸方向の傾斜率で未知数、 b ：JGEOID93のy軸方向の傾斜率で未知数、 c ：JGEOID93のxy座標原点におけるオフセット量で未知数。

この式から次のジオイド高に関する観測方程式を導ける。

$$v = xa + yb + c - (N^j - N) \quad (5-2)$$

初期値としては $N = N^j$ として計算をはじめめる。

5-2 他の観測値の観測方程式

これら統合処理において、GPS・距離・角・比高観測値などはジオイド高の関数であるから、これらの観測値についての観測方程式も(5-1)式に示された未知数 a, b, c が関係してくる。代表的な観測方程式を導いてみる。

比高観測値の観測方程式は、次式で表せる。

$$v = -dh_i + dh_j + (x_i - x_j)a + (y_i - y_j)b + (H_j - H_i) - \Delta H_{ij} \quad (5-3)$$

ただし、 dh ：高さの補正值(未知数)、 xy ：座標値、 H ：概算標高、 ΔH ：観測比高。

距離観測値の観測方程式は次式で表せる。

$$v = c_1 dB_i + c_2 dL_i + c_3 dh_i + c_4 dB_j + c_5 dL_j + c_6 dh_j + (c_3 x_i + c_6 x_j)a + (c_3 y_i + c_6 y_j)b + (c_3 + c_6)c + S_{ij} - s_{ij} \quad (5-4)$$

ただし、 c_k ：係数、 $dB \cdot dL$ ：緯度・経度への補正值(未知数)、 S_{ij} ：概算距離、 s_{ij} ：観測距離。

これらの観測方程式をみて分かるように、ジオイド高に関する a, b, c の3つの未知数が網全体に加わることになる。他の観測値の観測方程式については省略するが、

同様につくれる。これらの観測方程式のうち、距離・水平角・方位角などの観測値に関したのものについては未知数 a, b, c との関係が薄く、高度角・比高・GPSなどの観測値に関しては未知数 a, b, c との関係が大きい。

極めて広域的な処理の場合は、調査地域を分割して、各分割地域ごとに異なった a, b, c を未知数とすればよい。

6. 展開法による処理

従来の地上観測値である角の一般的処理としては、天文観測値そのものを観測値として扱う。この場合各点の天文経緯度が未知量として扱われるので、各点に未知数が2個増える。従って、3次元処理の場合1点につき5個の未知数となる。古典的手法では、方位角・水平角・高度角は、その観測点の鉛直線偏差に基づいて準拠楕円体面へ化成され、この化成観測値を用いて楕円体上で処理する。この方法は「投影法」と呼ばれている。

測地網の厳密な処理は投影法によらなければならないが、各観測点における鉛直線偏差は多くの場合未知であり、投影法による処理は困難である。従って、ジオイドの短波長を無視してジオイド面を近似的に楕円体面として扱い、観測角を何等化成せずに処理する。この処理を「展開法」と呼んでいる。例えば、我が国の測量成果は展開法により処理されているものであるが、2点間の距離に関しては、投影法処理と展開法処理の差は観測誤差の範囲内であって(Nakane, 1993)、現在の国土地理院の成果に問題はない。

この展開法によりGPS観測値と角などの地上観測値を統合処理する場合、従来の角などの地上観測値はそのまま用いるので、GPSの観測値をジオイド面へ化成しなければならない。

6-1 基準点測量作業規程等によるGPS観測値の処理

我が国の精密なジオイド高及び鉛直線偏差が確定されていない条件下で、国土地理院はGPS観測値の処理方法を決め、それを標記の作業規程などに示してある。その方法は、調査地域内の楕円体面とジオイド面の間の傾き・回転・スケールが一様であるとの仮定のもとに成り立っていて、GPS観測値をジオイド面へ化成してジオイド面で処理する方法である(Vincenty, 1982)。いわば、展開法とも呼べる方法である。その場合のGPSによる2点間 ij の基線ベクトルの観測値の観測方程式は、次式で示されている。

$$v = -X_j + X_i + M_\xi \Delta X \cdot \xi + M_\eta \Delta X \cdot \eta + M_\alpha \Delta X \cdot \alpha + \Delta X \cdot k - x_{ij} \quad (6-1)$$

ただし、 v ：残差ベクトル、 $X_i X_j$ ：未知点 i 及び j の3次元地心座標値で未知数、 $M_\xi M_\eta M_\alpha$ ：近似緯度経度からつくる(3×3)の係数行列、 ΔX ： ij 間の近似座標差、 $\xi \eta \alpha$ ：楕円体面とジオイド面の微小回転量

で未知数, k ; スケールファクターで未知数, x_i : GPSによる基線ベクトルの観測値。

この観測方程式により網平均を行う場合, 調査地域内には水準点など標高の既知点が3点(直線上にない)以上及び2点程度の水平位置の既知点が必要とされる。楕円体面とジオイド面の傾き(ξ, η)・回転(α)・スケール(k)の4つが未知数として扱われているが, 我が国のような山岳地域でジオイドの短波長成分のパワーが強い条件下では, こうした傾き及び回転などを一様なものと仮定した場合, 広範囲の処理には適用できない。

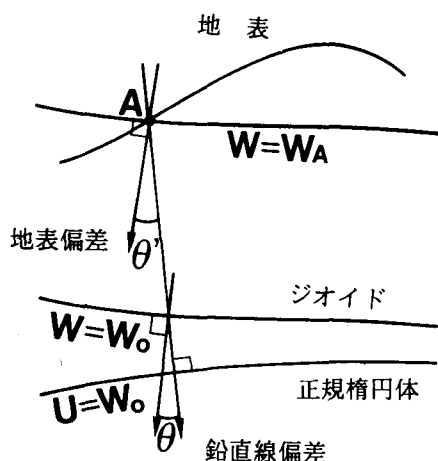
表-2及び3に示したように, JGEOID93を用いない場合の未知点の高さの確度は, GPS/水準の点密度が100km²に1点の割合で5cm程度である。基準点測量作業規程などによる場合, ジオイド高に関する情報はGPS/水準の観測点だけであるので, 少なくとも調査地域の測地網内に100km²に1点以上の割合でGPS/水準の観測点を配置しなければならない。

6-2 ジオイド面の多面体近似による広域的処理

上述による(6-1)式では($\xi \eta \alpha k$)を調査地域全体の未知数としてある。例えば, 調査地域をA, B, Cなどに分割して, 各分割された地域ごとに($\xi_A \eta_A \alpha_A k_A$)($\xi_B \eta_B \alpha_B k_B$)($\xi_C \eta_C \alpha_C k_C$)の未知数を設けて処理すれば, 広域的な処理が可能である。すなわち, 基準点測量作業規程ではジオイド面を一面で近似したのに対して, ジオイド面を多面体で近似するという方法である。途上国などのジオイド高や鉛直線偏差の情報が無い地域でのGPS観測値の処理として有効であろう。

7. 鉛直線偏差, 重力偏差, 地表偏差, 天文偏差

「鉛直線偏差」は, 第6図に示すようにジオイド上の鉛直線と正規楕円体の法線の間の角で定義される。別の言葉で言えば, 正規楕円体上の正規重力の方向とジオイド上の重力の方向の間の角が, 鉛直線偏差である。これ



第6図 鉛直線偏差(θ)及び地表偏差(θ')

はジオイド上での偏差であるから「ジオイド偏差」とも呼ぶ。同様に, 第6図に示してあるように, 正規楕円体の法線と地表上の鉛直線の方向の間の角は, 「地表偏差」と呼ばれている。これらのジオイド偏差と地表偏差とは異なる量であるが, 理論的には関連づけられる量である。

鉛直線偏差は, 重力異常の全地球の積分によるベニングマイネスの公式(式は省略)により求められる。こうして得られた鉛直線偏差を「重力偏差」と呼ぶ。地表偏差は, 天文観測による経緯度と測地経緯度との差で求まる。こうした天文観測により求めたものを「天文測地偏差」又は「天文偏差」と呼ぶ。

鉛直線偏差の定義は, ジオイド上の鉛直線と正規楕円体の法線の間の角で定義された。日本では, ベッセル楕円体要素を用い東京を原点とし, それを準拠楕円体としている。この準拠楕円体は, 地球重心を中心とする正規楕円体ではない。また, 日本の水準原点はジオイド面に準拠したものではなく, 東京湾の平均海水面を基準にした局所ジオイドである。我が国の準拠楕円体及び局所ジオイドにより求められた鉛直線偏差はその定義と異なり, 「相対鉛直線偏差」とでも呼ぶべきものである。しかし, 以下の議論では単に「鉛直線偏差」と呼ぶことにする。

7-1 天文偏差

光学的天文観測は手間暇がかかるので, 観測点密度が粗い。国土地理院は, 1949年から1994年の間の約半世紀に実施した天文観測点は僅か462点である。この測点間距離は30km程度であり, 十分な密度でない。天文偏差の既知点を増やすためには, 内挿による方法が手取り早い。

天文偏差はジオイドの微量分に相当し, 地形質量の引力によるような局所的重力異常(ジオイドの短波長成分)の影響を強く受ける。単純な内挿では正確さに欠ける結果しか得られない。正確な内挿結果を得るため, 地形の影響を考慮した天文偏差の精密内挿(中根, 藤原, 大滝 1995)を行った。この精密内挿の精度は, 日本(島部を除く)の任意の点において, 平均的に2秒程度である。この方法により, $5' \times 7.5'$ の格子上での天文偏差を推定した。その総点数は, 約3500箇所である。

なお, 日本の測地経緯度は投影法により求められたものでないので, 厳密には測地経緯度とは言えない。しかし, 実用的には問題ないので, 天文経緯度と測地経緯度の差から近似的天文偏差を計算し, それを天文偏差として扱う。

7-2 重力偏差

天文偏差の観測点密度が粗なのに対して, 重力観測は簡便なので重力偏差の観測点を密にすることができる。重力偏差は, ベニングマイネスの公式により求めることを既に述べた。また, 全地球の重力異常値の積分によるストークスの公式(式省略)により求めたジオイド高(N)



第7図 天文偏差と重力偏差の較差（矢印）が10秒を越えるもの

の微分量として、鉛直線偏差は次式で表される。

$$\xi = -(1/r) (\partial N / \partial \phi)$$

$$\eta = -(1/r \cos \phi) (\partial N / \partial \lambda) \quad (7-1)$$

ただし、 ϕ は中心緯度である。

7-3 天文偏差と重力偏差の比較

天文偏差点において、(7-1)式により重力偏差を計算した。第7図は、その較差が10秒を越えるものをベクトル（矢印）で示してある。北海道では、日高山脈に一樣な差が現れている。本州では、山岳地域であるアルプス地域にランダムな差が現れている。島部である佐渡島にも一樣な差が現れている。このように、重力偏差と天文偏差の較差の大きい場所は、山岳地域及び島部に限られている。山岳地域においては、天文偏差が地形質量の引力による重力の局所異常の影響を強く受けているのに対して、重力偏差は地形の影響が少ない。島部における較差は、海部の地形の処理などに起因するものかもしれないが、いまはその原因を特定できない。

表-4は、天文偏差と重力偏差の較差を示したものである。10秒を越えるものは僅か2%程度である。

天文偏差と重力偏差の較差の地域別平均値を調べた。

表-4 日本における天文偏差と重力偏差の較差

差	個数	(個数/3491)
10秒を越える	68個	1.9%
7秒を越える	230個	6.6%
5秒を越える	555個	15.9%
3秒を越える	1473個	42.2%

10秒を越える大きなものを除いたデータから求めた結果を次の表-5に示してある。全国的な平均値では、JGEOID93の4.5ppm西上がりと表現できる較差がある。南北方向は、1ppm程度北上がりの較差である。東北及び関東・東海地方における東西方向の較差が大きい。これは、日本海溝付近の重力異常をOSU91Aでは十分に表現できていないため、それを基準としてあるJGEOID93の傾斜誤差となって現れている可能性がある。中国・四国地方の南北方向の較差が他の地域より大きいことが目立つ。この場合も南海トラフの影響の可能性もある。或いは、東北地方の陸地は東西方向に幅が狭く同様に中国・四国地方は南北方向に幅が狭いため、陸地の重力値の影響からOSU91Aにこうした方向の誤差をもたらしている可能性もある。しかし、こうした較差の確実な原因について、現在のところ特定できない。

表-5 天文偏差と重力偏差の較差（JGEOID93：西上がり、北上がり）

地域	較差 ppm		較差のrms 秒		改善 rms 秒	
	東西	南北	東西	南北	東西	南北
北海道	2.3	0.7	3.1	2.2	3.1	2.2
東北	6.5	0.0	3.0	1.9	2.6	1.9
関東・東海	6.1	0.0	2.9	2.5	2.6	2.5
中部・近畿	3.9	1.3	2.7	2.2	2.6	2.1
中国・四国	4.0	3.0	2.1	2.2	2.0	2.2
九州	4.4	1.2	2.2	2.4	2.0	2.4
全国平均	4.5	1.1	2.7	2.3	2.6	2.2

その較差の平均的rmsは、東西方向で2.7秒、南北方向で2.3秒である。系統的な較差を改善した後のrmsは、東西方向2.7から2.6へ南北方向2.3から2.2へ僅か改善される。rmsが3秒以内であるので、投影法に用いる鉛直線偏差としては天文偏差及び重力偏差いずれを用いてもよさそうである。

7-4 鉛直線偏差の化成角に及ぼす影響

地上における角の観測値の楕円体上への化成は、i点からj点の楕円体上の方位角 A_{ij} 、同観測方位角 θ_{ij} 、i点におけるj、k点の楕円体上の水平角 W_{ijk} 、同観測水平角 ω_{ijk} 、i点におけるj点の楕円体上の高度角 Z_{ij} 、同観測高度角 α_{ij} 、i点における鉛直線偏差(南北方向 ξ_i 、東西方向 η_i)及び緯度 ϕ_i として、次式によって示されている。

$$A_{ij} = \theta_{ij} - \{ \eta_i \tan \phi_i + (\xi_i \sin \theta_{ij} - \eta_i \cos \theta_{ij}) \tan \alpha_{ij} \}$$

$$W_{ijk} = \omega_{ijk} - \{ (\xi_i \sin \theta_{ik} - \eta_i \cos \theta_{ik}) \tan \alpha_{ik} - (\xi_i \sin \theta_{ij} - \eta_i \cos \theta_{ij}) \tan \alpha_{ij} \}$$

$$Z_{ij} = \alpha_{ij} - (\xi_i \cos \theta_{ij} + \eta_i \sin \theta_{ij}) \quad (7-2)$$

地上観測値を楕円体面へ投影する場合、鉛直線偏差のもつ誤差が化成観測値へ及ぼす影響は(7-2)式により見積もれる。例えば、 ξ および η が3秒の誤差がある

場合について調べてみる。 i 点から j 点の方位角 $\theta_{ij} = 0^\circ$ 及び高度角 $\tan \alpha_{ij} = 0^\circ$ 。 i 点から k 点方向の方位角 $\theta_{ik} = 90^\circ$ 及び高度角 $\tan \alpha_{ik} = 0.2$ 。この場合の水平角 W_{ijk} へ及ぼす誤差は0.3秒である。このように、鉛直線偏差の誤差の水平角へ及ぼす影響は、ほとんど問題にならない。

高度角の場合、鉛直線偏差の誤差がそのまま影響する。高度角の観測誤差は3～5秒程度あり、鉛直線偏差の平均的な内挿誤差が2～3秒程度であるので、高度角へ及ぼす鉛直線偏差の誤差の影響もそれほど大きくない。しかし、山岳地域などで内挿による鉛直線偏差の精度が著しく悪い場合の処理方法の検討が必要である。

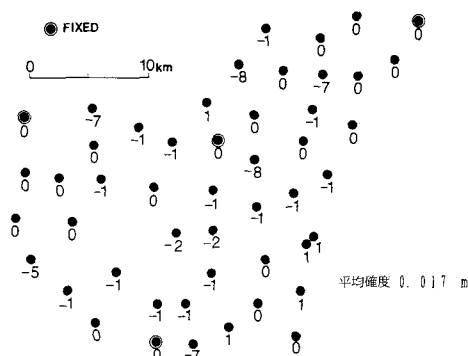
天文偏差は地表上で観測された鉛直線偏差であるので、楕円体面へ化成するための鉛直線偏差としてはこの天文偏差を用いるのがよい。

8. 計算結果

第5節で述べたジオイド高を観測値とした統合処理により、房総地区の測地網の処理を行った。この測地網は全点水準測量により高さが正確に決まっているので、GPS観測値から推定された高さの確度が求まる。第8図は4点を固定した場合の高さの確度である。平均的な確度は0.017mである。一方、基準点測量作業規程による方法の場合、その平均的確度は0.102mである。明らかにJGEOID93を用いた統合処理の方が優れた結果となる。

おわりに

今回の調査結果から次のような結論を導くことができる。(1) JGEOID93によるジオイド高を観測値として扱いGPS観測値などと同時に統合処理が可能である。(2) GPS/水準の観測点密度を調査地域の測地網内



第8図 統合処理によるGPSの高さの確度(単位cm)
房総地区: 49点(固定点4点)

に100km²に1点以上の割合としたとき、JGEOID93を用いてGPS観測値から求められた未知点の標高の確度3cm程度を期待できる。(3) 方位角・水平角・高度角などの観測値の楕円体への化成に用いる鉛直線偏差は地表偏差である天文偏差を用いる。ただし、山岳地域及び島部などの鉛直線偏差の内挿精度の著しく悪い地域における高度角観測値の化成には注意しなければならない。

今回は、ジオイド高及び鉛直線偏差の考察に重点がおかれた。そのために、第5節で考察したJGEOID93を観測値として処理する具体的計算例及び第7節で考察した展開法の広域的処理の具体計的算例を十分に示していない。この計算例については次回に報告したい。

謝辞

茨城大学藤井陽一郎教授にはLSCなどに関するご指導を頂いた。同教授に感謝する。海津優氏には長年にわたり多くの有益なコメントを頂いている。同氏に感謝する。

参考文献

- 福田洋一 (1993): 水準・GPS・重力, 測地学会誌, 39, 327-340
- Heiskanen W.A. & H.Moritz (1967): Physical Geodesy, Freeman, San Francisco.
- Kuroishi Y.(1995): Precise Gravimetric Determination of Geoid in the Vicinity of Japan, Bull. GSI, 41, 1-93
- 国土地理院 (1995): 基準点測量作業規程
- Moritz H. (1980): Advanced Physical Geodesy, Wichman Verlag, Karlsruhe.
- 中根勝見・黒石裕樹 (1995): 「JGEOID93」モデルを用いた詳細ジオイドの決定, 地球惑星科学関連学会1995年合同大会予稿集.
- Nakane k. (1993): Effect of Deflections of the Vertical on Side Length of Triangulation Network, 測地学会誌, 39, 275-281.
- 中根勝見・藤原智・大滝修 (1995): 鉛直線偏差の精密内挿, 国土地理院時報 82, 58-62
- 竹本 孝 (1993): 最小2乗コロケーション法によるローカルジオイド高の推定, 国土地理院研究報告
- 飛田幹男 (1994): 地域毎に求めた東京測地系-WGS84系間の変換パラメータ, 国土地理院時報79, 7-14
- Vincenty T. (1982): Methods of Adjusting Space Systems Data and Terrestrial Measurements, Bull. Geod. 56, 231-241.